ĐỀ THI HSG LỚP 8
Trường NGÔ QUYỀN (2014-2015)

Thời gian: 90 phút
(NGÀY THI: 12-01-2015)

Bài 1: $A=\left(\frac{2+x}{2-x}-\frac{4x^2}{x^2-4}-\frac{2-x}{2+x}\right):\left(\frac{4x^2-12x}{2x^2-x^3}\right)$

a) Tìm điều kiện của A và rút gọn A

b) Tìm x để $A\in Z$

Bài 2: Tìm x biết:

a) $2013x^2+x=2012$

b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24=0$

Bài 3:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=2x^2+y^2-2xy+4x+2y+5$

b) Cho a + b + c =1 và $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$. Chứng minh: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$

Bài 4: Cho hình vuông ABCD. Lấy E bất kì trên BC, trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho CF = CE. K là giao điểm của FE và BD. O là giao điểm của AC và BD. DE cắt BF tại H. M là trung điểm của EF.

a) Chứng minh: $DH\perp BF$.

b) Chứng minh: tứ giác OKMC là hình chữ nhật.

c) Chứng minh: A, H, K thẳng hàng.

Bài 5: Cho ΔABC nhọn có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M, N, S lần lượt là điểm đối xứng của H qua BC, AC, AB. Tính $\frac{AM}{AD}+\frac{BN}{BE}+\frac{CS}{CF}$.

HẾT

HƯỚNG DẪN ĐỀ THI HSG LỚP 8
Trường NGÔ QUYỀN (2014-2015)

Bài 1: $A=\left(\dfrac{2+x}{2-x}-\dfrac{4x^2}{x^2-4}-\dfrac{2-x}{2+x}\right):\left(\dfrac{4x^2-12x}{2x^2-x^3}\right)$

a) Tìm điều kiện của A và rút gọn A

Điều kiện: $\begin{cases}2-x\neq 0\\ x^2-4\neq 0\\ 2+x\neq 0\\ 2x^2-x^3\neq 0\\ 4x^2-12x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x\neq -2\\ x\neq 0\\ x\neq 3\end{cases}$

$$A=\left(\frac{2+x}{2-x}-\frac{4x^2}{x^2-4}-\frac{2-x}{2+x}\right):\left(\frac{4x^2-12x}{2x^2-x^3}\right)=\left(-\frac{x+2}{x-2}-\frac{4x^2}{(x+2)(x-2)}+\frac{x-2}{x+2}\right):\left[-\frac{4x(x-3)}{x^2(x-2)}\right]$$

$$A=\frac{-(x+2)^2-4x^2+(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}:\left[-\frac{4(x-3)}{x(x-2)}\right]=\frac{-x^2-4x-4-4x^2+x^2-4x+4}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{x(x-2)}{-4(x-3)}$$

$$A=\frac{-4x^2-8x}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{x(x-2)}{-4(x-3)}=\frac{-4x(x+2)}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{x(x-2)}{-4(x-3)}=\boxed{\frac{x^2}{x-3}}$$

b) Tìm x để $A\in Z$

$$A=\frac{x^2}{x-3}=\frac{x^2-9+9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)+9}{(x-3)}=x+3+\frac{9}{x-3}$$

Để $A\in Z$ thì $9\,\vdots\,(x-3)\Leftrightarrow(x-3)\in Ư(9)\Leftrightarrow(x-3)\in\{1;-1;3;-3;9;-9\}\Leftrightarrow x\in\{4;2;6;0;12;-6\}$

Loại x = 2 và loại x = 0. Vậy $x\in\{4;6;12;-6\}$ thì A có giá trị nguyên.

Bài 2: Tìm x biết:

a) $2013x^2+x=2012$

$2013x^2+x=2012\ \Leftrightarrow\ 2013x^2+2013x-2012x-2012=0$

$\Leftrightarrow 2013x(x+1)-2012(x+1)=0\ \Leftrightarrow\ (x+1)(2013x-2012)=0$

$\Leftrightarrow x+1=0$ hay $2013x-2012=0\ \Leftrightarrow\ x=-1$ hay $x=\dfrac{2012}{2013}$

Vậy $x=-1$ hay $x=\dfrac{2012}{2013}$

b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24=0$

$$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)(x+5)(x+3)(x+4)-24=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-24=0$$

Đặt $y=x^2+7x+11$, khi đó phương trình trở thành:

$(y-1)(y+1)-24=0 \Leftrightarrow y^2=25 \Leftrightarrow y=5$ **hay** $y=-5$

TH1: $y=5 \Rightarrow x^2+7x+11=5 \Leftrightarrow x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+6)=0 \Leftrightarrow x=-1$ **hay** $x=-6$

TH2: $y=-5 \Rightarrow x^2+7x+11=-5 \Leftrightarrow x^2+7x+16=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4}=0$ (**vô lí**)

Vậy $x=-1$ **hay** $x=-6$

Bài 3:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=2x^2+y^2-2xy+4x+2y+5$

$$A=2x^2+y^2-2xy+4x+2y+5$$
$$A=y^2-2xy+2y+2x^2+4x+5$$
$$A=y^2-2y(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^2+2x^2+4x+5$$
$$A=(y-x+1)^2-x^2+2x-1+2x^2+4x+5$$
$$A=(y-x+1)^2+x^2+6x+4$$
$$A=(y-x+1)^2+(x+3)^2-5\geq -5$$

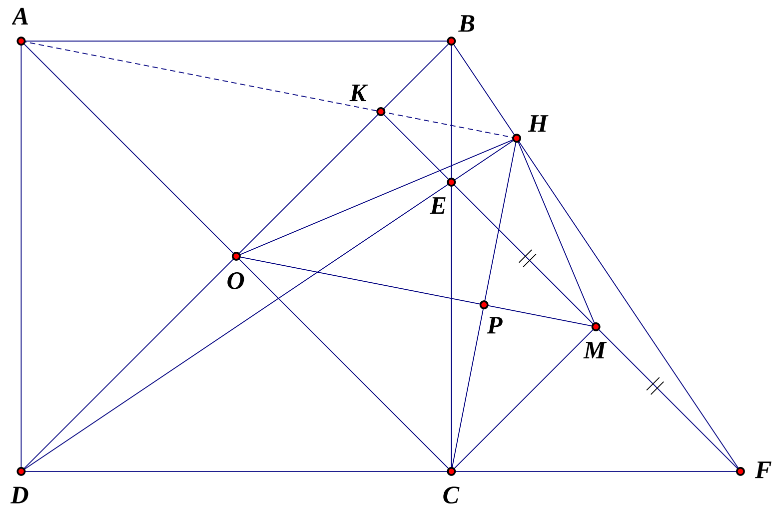
Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -5. Dấu ''='' xảy ra khi $\begin{cases} x+3=0 \\ y-x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$

b) Cho a + b + c =1 và $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$**. Chứng minh:** $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$

Ta có: a + b + c =1 và $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$

$$\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)=a+b+c$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2+a(b+c)}{b+c}+\frac{b^2+b(c+a)}{c+a}+\frac{c^2+c(a+b)}{a+b}=a+b+c$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{c+a}+b+\frac{c^2}{a+b}+c=a+b+c$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$$

Bài 4: Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm E bất kì trên BC, trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho CF = CE. K là giao điểm của FE và BD. O là giao điểm của AC và BD. DE cắt BF tại H. M là trung điểm của EF.



a) Chứng minh: $DH \perp BF$.

Xét ΔCEF vuông tại C, ta có CF = CE (gt) $\Rightarrow \Delta CEF$ vuông cân tại C $\Rightarrow \widehat{CFE} = 45^0$

Mà $\widehat{ACD} = 45^0$ (...) nên $\widehat{CFE} = \widehat{ACD}$. Mặt khác: 2 góc này nằm ở vị trí đồng vị nên FE // AC

Mà $AC \perp BD$ (ABCD là hình vuông) nên $FE \perp BD$ tại K

Xét ΔBDF, ta có: $\begin{cases} BC \text{ là đường cao } (BC \perp DF \text{ tại } F) \\ FK \text{ là đường cao } (FK \perp BD \text{ tại } K) \\ BC \text{ cắt } FK \text{ tại } E \text{ (gt)} \end{cases}$

$\Rightarrow$ E là trực tâm của ΔBDF mà DE cắt BF tại H nên $DH \perp BF$

b) Chứng minh: tứ giác OKMC là hình chữ nhật.

Xét ΔCEF cân tại C, ta có CM là đường trung tuyến (...) nên CM là đường cao của ΔCEF.

Xét tứ giác OKMC, ta có $\widehat{COK} = \widehat{OKM} = \widehat{CMK} = 90^0$

$\Rightarrow$ tứ giác OKMC là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông)

c) Chứng minh: A, H, K thẳng hàng.

Gọi P là giao điểm của OM và CH.

Ta có: $\begin{cases} OH = OC \left(= \dfrac{BD}{2} \right) \\ MH = MC \left(= \dfrac{EF}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow$ OM là đường trung trực của đoạn HC $\Rightarrow$ P là trung điểm của HC.

Do đó: OP là đường trung bình của $\Delta CAH \Rightarrow OP \parallel AH \Rightarrow OM \parallel AH$ (vì $P \in OM$)

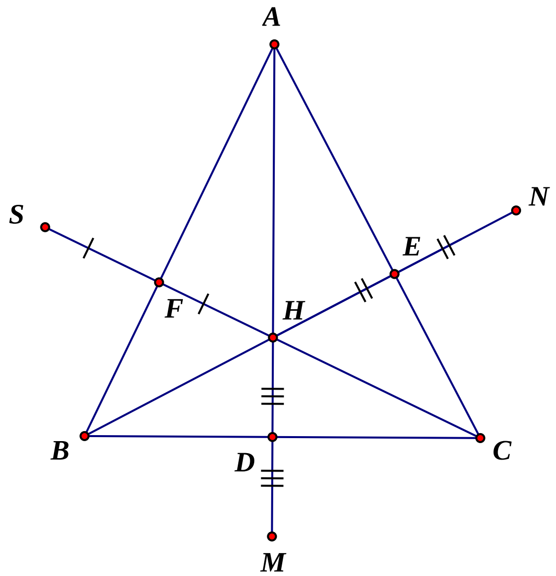
Ta có: $\begin{cases} KM = OC \text{ (OKCM là hình chữ nhật)} \\ OA = OC \text{ (O là trung điểm của AC)} \end{cases} \Rightarrow KM = OA$

Xét tứ giác OAKM, ta có:

$\begin{cases} KM \parallel OA \text{ (...)} \\ KM = OA \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow$ tứ giác OAKM là hình bình hành (...) $\Rightarrow OM \parallel AK$

Ta có: $\begin{cases} OM \,//\, AH(\text{cmt}) \\ OM \,//\, AK(\text{cmt}) \end{cases} \Rightarrow AH \equiv AK(\text{Tiên đề Ơ-clit}) \Rightarrow A, H, K$ thẳng hàng.

Bài 5: Cho ΔABC nhọn có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M, N, S lần lượt là điểm đối xứng của H qua BC, AC, AB. Tính $\frac{AM}{AD}+\frac{BN}{BE}+\frac{CS}{CF}$.



Ta có:

$$\frac{AM}{AD}+\frac{BN}{BE}+\frac{CS}{CF}=\frac{AD+MD}{AD}+\frac{BE+NE}{BE}+\frac{CF+SF}{CF}=1+\frac{MD}{AD}+1+\frac{NE}{BE}+1+\frac{SF}{CF}=3+\frac{MD}{AD}+\frac{NE}{BE}+\frac{SF}{CF}$$

mà MD = HD; NE = HE; SF = HF

nên $\frac{AM}{AD}+\frac{BN}{BE}+\frac{CS}{CF}=3+\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}$

Ta có: $S_{HBC}+S_{HAC}+S_{HAB}=S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}=1$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}HD.BC}{\frac{1}{2}AD.BC}+\frac{\frac{1}{2}HE.AC}{\frac{1}{2}BE.AC}+\frac{\frac{1}{2}HF.AB}{\frac{1}{2}CF.AB}=1 \Rightarrow \frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=1 \Rightarrow 3+\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=4$$

Mà $\frac{AM}{AD}+\frac{BN}{BE}+\frac{CS}{CF}=3+\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}$ nên $\frac{AM}{AD}+\frac{BN}{BE}+\frac{CS}{CF}=4$

HẾT